Feuille 2 (TP 3 et 4)- Méthodes de simulations et premières applications

NB : Dans vos fichiers .sce ou .sci pensez à bien structurer vos fonctions : sautez des lignes, indentez lorsque vous utilisez des boucles ou des instructions conditionnelles, faites quelques commentaires. Sauvegardez systématiquement vos fichiers !

1 Méthodes de simulation

1. Simuler soi même la loi géométrique de paramètre p. En profiter pour retrouver la commande permettant de simuler cette loi sous Scilab.
2. Simuler par inversion la loi exponentielle. En profiter pour retrouver la commande permettant de simuler cette loi sous Scilab. Consulter l'aide sur `cdf`.
3. Ecrire à l'aide de l'algorithme de Box-Muller une fonction renvoyant un tirage d'un couple de v.a. indépendantes (X, Y) suivant respectivement une $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ (où μ_1, σ_1, μ_2, σ_2 sont en entrée).
4. Soit (U_n) une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $N = \max\{n \geq 1 \mid U_1 \times ... \times U_n > e^{-\lambda}\}$. Quel est le lien entre N et un processus de Poisson de paramètre λ ? Ecrire une fonction permettant de simuler la loi de N. Comparer graphiquement probabilité théorique de la loi de Poisson de paramètre λ et probabilités observées pour N.
5. La loi Beta de paramètres r et s admet pour densité

$$\frac{1}{B(r, s)} 1_{[0,1]}(x) x^{r-1}(1-x)^{s-1},$$

   $B(r, s)$ étant la constante de normalisation.
   (a) Ecrire une fonction simulant par inversion (par exemple) une variable aléatoire de densité $g(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$.
   (b) Utiliser la méthode du rejet pour simuler une loi Beta de paramètres $r = 2$ et $s = 2$. On écrira d'abord une fonction donnant une épreuve de la loi, puis on modifiera cette fonction pour que ce qui est retourné est un échantillon de taille n (fournie en entrée).

(c) Superposer le graphe de la densité d'une loi Beta$(2,2)$ et l'histogramme d'un échantillon de taille grande de la loi Beta$(2,2)$ simulée dans la question précédente.

2 Illustration de théorèmes de convergence

1. Illustrer graphiquement la loi des grands nombres sur des échantillons de quelques lois de votre choix (Bernoulli, Normale, Poisson,...). On affichera par exemple l'évolution de la moyenne empirique en fonction du nombre de simulations.
2. Illustrer l'approximation poissonienne de la loi binômiale graphiquement. On affichera par exemple une superposition du diagramme en bâton de la loi de Poisson et de la loi binômiale.
3. Illustrer le Théorème Central Limite graphiquement sur des échantillons de quelques lois de votre choix. On affichera par exemple une superposition de la densité d'une loi normale et de l'histogramme adéquat.

3 Méthodes de Monte Carlo

3.1 Calcul de $B(r,s)$

1. Déterminer à l'aide d'une méthode de Monte Carlo une valeur approchée de $B(1.5,2)$, la constante de normalisation de la loi Beta$(1.5,2)$. Donner une valeur numérique pour l'intervalle de confiance au niveau 0.95 après avoir estimé la variance. Vous pourrez par exemple créer une fonction qui prend en argument r, s, la taille de la simulation, et qui renvoie un vecteur donnant une estimation numérique de l'intégrale, de la variance ainsi que de l'intervalle de confiance.
2. Déterminer à l'aide d'une méthode de Monte Carlo une valeur approchée de Beta$(1.5,2)$ en utilisant une variable antithétique. Estimer la variance de l'erreur : a-t-elle beaucoup diminué ?
3. (Si vous avez le temps) Avec l'estimation de Beta$(1.5,2)$ obtenue précédemment, simuler par la méthode du rejet la loi Beta$(1.5,2)$. Superposer le graphe de la densité d'une loi Beta$(1.5,2)$ et l'histogramme d'un échantillon de taille grande de la loi Beta$(1.5,2)$ simulée ainsi.

3.2 Calcul du prix d'un "call"

En finance, le prix d'une option Call est donnée par

$$I = E\left((e^{\sigma X} - K)^+\right)$$

où X suit une $\mathcal{N}(0,1)$ et K est une constante (le "strike price").

1. Déterminer une valeur approchée de I par une méthode de Monte Carlo. On écrira une fonction qui prend en argument la taille de la simulation ainsi que les valeurs de σ et K, et qui renvoie l'estimation de I, l'estimation de la variance, et une application numérique de l'intervalle de confiance.
2. On pose
$$P = E\left((K - e^{\sigma X})^+\right).$$
   (a) Donner un lien simple entre I et P (on rappelle que si Y suit une $\mathcal{N}(0,1)$ on a $E\left(e^{\beta Y}\right) = e^{\beta^2/2}$).
   (b) Estimer alors I par une méthode de Monte Carlo à l'aide d'une variable de contrôle. On vérifiera numériquement que la variance de l'erreur a beaucoup diminué.
3. (Si vous avez le temps) Tester une méthode de Monte Carlo pour estimer I en utilisant une variable antithétique et regarder numériquement si la variance a diminué.