1 Notions de base en probabilités

1.1 Éléments de probabilités

Probabilités sur un espace fini, évènements

Exercice 1.1 (⊛⊛)

Deux joueurs misent chacun 32 pistoles pour une partie de dés en 3 manches gagnantes. Ils décident initialement que le joueur qui gagnera 3 manches remportera la totalité de 64 pistoles. Malencontreusement, la partie doit être interrompue alors que le 1er joueur a remporté 2 manches et le 2e joueur 1 manche. Comment nos deux malheureux joueurs doivent-ils procéder pour se répartir équitablement la mise ?

Exercice 1.2 (⊙⊙)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, avec P une mesure de probabilité sur les évènements de Ω. Montrer les propositions suivantes :

1. Pour tout évènement A :
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$
2. Pour tous les évènements A et B :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
Indication : faire un dessin !
3. En déduire l'inégalité de Bonferroni :
$$P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Exercice 1.3 (⦸⊘)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, avec P une mesure de probabilité sur les évènements de Ω. Soient A, B, C trois évènements quelconques de Ω. Montrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Indication : faire un dessin !

Exercice 1.4 (⊛⊛)

Soient A et B deux évènements tels que $P(A) = 0.53$ et $P(B) = 0.72$.

1. A et B sont-ils incompatibles ?
2. Sachant que $P(A \cup B) = 0.89$, déterminer $P(A \cap B)$ et $P(A \cap \bar{B})$.

Probabilités conditionnelles, indépendance

Exercice 1.5 (⊙⊙)

On jette un dé plusieurs fois de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne un numéro pair. Quelle est alors la probabilité d'obtenir un 2 ?

Exercice 1.6 (⦸⊘)

On lance deux dés non truqués à n faces. On note N_i $(i = 1, 2)$ le résultat du lancer pour le dé numéro i. Déterminer la probabilité de l'évènement $(N_1 > N_2)$.

Exercice 1.7 (⊙⊙)

Soit $(B_i)_{i\geq 1}$ une suite d'évènements mutuellement exclusifs avec :

$$\forall n \geq 1,\ P(B_n) > 0, \qquad \cup_{i\geq 1} B_i = \Omega.$$

Etablir la règle de Bayes :

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{n\geq 1} P(A|B_n)P(B_n)}.$$

Exercice 1.8 (⊛⊛)

Nicolas a égaré ses lunettes de soleil sur une plage qu'on peut diviser comme suit en trois zones de surface égale :

Zone 1	Zone 2	Zone 3

La probabilité de ne pas trouver les lunettes dans la Zone 1 alors qu'elles y sont effectivement a pour valeur 1/2. Quelle est la probabilité pour qu'elles se trouvent dans chaque région 1,2,3 sachant que les recherches dans la zone 1 n'ont finalement rien donné ?

Exercice 1.9 (⊛⊛)

Dans une population donnée, l'incidence de la tuberculose a été estimée à 1 cas pour 10 000 personnes-années. La prévalence du VIH a été estimée à 0.4 %. On diagnostique une infection au VIH chez 15 % des nouveaux cas de tuberculose. Quelle est l'incidence de la tuberculose chez les personnes infectées par le VIH ?

Exercice 1.10 (⊙⊙)

Soient A et B deux évènements indépendants. Montrer que A et $\bar{B}$ le sont aussi.

Exercice 1.11 (⃠⊘)

Dans un cachot du Moyen-Age, le geôlier informe trois prisonniers que l'un d'entre eux sera choisi au hasard pour être exécuté, alors que les deux autres seront libérés. Le premier prisonnier demande alors au geôlier de lui dire quel prisonnier parmi les deux autres sera libéré. Il se justifie en disant que de toutes façons, il sait que l'un des deux sera libre, et que cette information ne change rien pour lui.

Le geôlier lui répond alors que s'il lui donne cette information, sa probabilité d'être exécuté pourrait augmenter, et qu'il préfère alors garder le silence.

Que doit penser le prisonnier de la réponse du geôlier, et de son propre sort ?

Exercice 1.12 (⃠⊘)

Résoudre le problème suivant, posé par le Chevalier de Méré à Pascal :

> Pourquoi est-t-il avantageux de parier qu'on va “sortir” un six en lançant quatre fois le dé, alors qu'il ne l'est pas de parier qu'on va sortir un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés ?

Légende :

⊛⊛ : exercice intéressant.
⊖⊖ : exercice d'entraînement.
⊙⊙ : exercice fondamental.
⃠⊘ : exercice délicat.

1.2 Variables aléatoires et lois de probabilités discrètes

Exercice 1.13 ($\odot\odot$)

Soit une urne qui contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs. Un joueur tire simultanément 2 jetons de l'urne. S'il tire 2 jetons blancs, il gagne 10 euros, s'il tire 2 jetons noirs, il gagne 2 euros, sinon il perd 5 euros (quand donc il tire un jeton noir et un blanc).

1. Décrire explicitement l'univers Ω associé à l'épreuve.
2. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ la variable aléatoire associée au gain, qui peut donc prendre pour valeurs -5 , 2 et 10. Donner la loi de probabilité associée à X.
3. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.
4. Le jeu est-t-il équitable ? Proposer une règle de répartition du gain qui le rende équitable.

Exercice 1.14 ($\odot\odot$)

On lance un dé équilibré à 6 faces. On appelle X la variable aléatoire qui a pour valeur le numéro sur la face qui apparait.

1. X est-t-elle discrète ou continue ? Donner la loi de probabilité de X.
2. Tracer la fonction de répartition F_X de X.
3. Calculer l'espérance mathématique $E[X]$.
4. Calculer la variance $Var(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 1.15 ($\odot\odot$)

Montrer que la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X vérifie les propriétés suivantes :

1. $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$.
2. $P(X > t) = 1 - F_X(t)$.
3. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Exercice 1.16 ($\odot\odot$)

1. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire constante, i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = c$, avec $c \in \mathbb{R}$. Montrer que $E[X] = c$, $Var(X) = 0$, $\sigma(X) = 0$.
2. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète, a et b deux réels, et ϕ, ψ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
$$E[a\phi(X) + b\psi(X)] = aE[\phi(X)] + bE[\psi(X)].$$
3. Montrer que la variance peut se calculer comme suit :
$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2.$$

Exercice 1.17 ($\ominus\ominus$)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On appelle $Y = X - E[X]$ la variable aléatoire centrée associée à X. Montrer que $E[Y] = 0$, $Var(Y) = Var(X)$ et $\sigma(Y) = \sigma(X)$. Justifier la terminologie employée pour Y.

Exercice 1.18 (⊙⊙)

On effectue 3 lancers de dés et on veut compter le nombre de six obtenus. Vérifier que la variable aléatoire qui permet de compter les six suit une loi binomiale, de paramètres n et p à déterminer.

Exercice 1.19 (⊛⊛)

Un texte imprimé comporte k erreurs typographiques. Lors de la relecture, une erreur a la probabilité $p = 3/4$ d'être détectée par un correcteur. Calculer l'espérance mathématique du nombre d'erreurs non détectées.

Exercice 1.20 (⊛⊛)

L'étoile la plus brillante du ciel est α du Grand Chien (Sirius). On considère que la probabilité d'apparition une année donnée d'une comète plus brillante que Sirius est égale à 1/43. Calculer la probabilité pour que, durant 100 années consécutives, il n'apparaisse aucune comète plus brillante que Sirius (*En réalité, les seules comètes plus brillantes que Sirius depuis le début du 20e siècle ont été Halley en 1910 et Hale-Bopp en 1997*).

Légende :

⊛⊛ : exercice intéressant.
⊖⊖ : exercice d'entraînement.
⊙⊙ : exercice fondamental.
⃠⊘ : exercice délicat.

1.3 Variables aléatoires et lois de probabilités continues

Exercice 1.21 (⊙⊙)

Soient $a < b$ deux réels. Une variable aléatoire continue $X : \Omega \to [a, b]$ suit la *loi uniforme* $\mathcal{U}(a, b)$ si sa densité de probabilité est la suivante :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x),$$

où $\mathbb{1}_{[a,b]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[a, b]$.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer et tracer la fonction de répartition $F_X(t)$ associée à X.
3. Soient c et d tels que $a \leq c < d \leq b$. Calculer $P(c \leq X \leq d)$.
   Justifier alors le terme de loi uniforme.
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable $E[X]$.
5. Calculer la variance $V(X)$.

Exercice 1.22 (⊖⊖)

Montrer que si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ ($m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$), alors : $E[X] = m$ et $Var(X) = \sigma^2$.

Exercice 1.23 (⊛⊛)

Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit la *loi exponentielle* $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est donnée par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

→ *C'est le modèle le plus simple pour la durée de vie d'un matériel (sans usure).*

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition $F_X(t)$ de X et tracer la courbe correspondante.
3. On appelle transformée de Laplace de la variable la fonction :

   $$\mathcal{L}(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

   Calculer la transformée de Laplace pour X, qui suit la loi exponentielle.
4. Montrer que pour toute variable aléatoire X, on a :

   $$\mathcal{L}'(0) = -E[X],$$

   et

   $$\mathcal{L}''(0) = E[X^2].$$

   En déduire la valeur de la moyenne et de la variance pour une variable X qui suit la loi exponentielle.
5. Montrer que X est effectivement sans mémoire (ou sans usure), c'est à dire :

   $$P(X \geq s + t | X \geq t) = P(X \geq s),$$

   pour $s, t \geq 0$.

6. Calculer $P(X \in (t, t+\delta t) | X \geq t)$ pour $\delta t > 0$ petit. Que conclut-on ?

Exercice 1.24 (⊙⊙)

1. Soit X une variable qui suit la loi normale $\mathcal{N}(5, 2)$. Calculer :
$$P(4 \leq X \leq 6); \quad P(X \geq 10); \quad P(5.8 \leq X \leq 6.2).$$
2. Soit X une variable qui suit la loi normale $\mathcal{N}(-10, 0.1)$. Calculer :
$$P(-11.5 \leq X \leq -8.5); \quad P(X \leq -8); \quad P(-7.8 \leq X \leq -7.6).$$

Exercice 1.25 (⊛⊛)

On s'intéresse à des modèles de survie. On considère des individus porteur d'une mutation prédisposant au cancer. L'âge de début de la maladie est une variable aléatoire X de fonction de densité $f(x)$ et de fonction de répartition $F_X(x)$. La *fonction de survie* est :
$$S(x) = 1 - F_X(x),$$
La *fonction de risque* est :
$$h(x) = -\frac{d \ln S(x)}{dx} = -\frac{S'(x)}{S(x)}.$$
Trouver f, F_X et S avec :

1. $h(x) = \lambda$ (risque constant),
2. $h(x) = \lambda k (\lambda x)^{k-1}$.

Légende :

⊛⊛ : exercice intéressant.
⊖⊖ : exercice d'entraînement.
⊙⊙ : exercice fondamental.
⃠⊘ : exercice délicat.

2 Régression linéaire

Exercice 2.1 (⊙⊙)

Le Professeur Gluckenmuhl effectue des mesures d'écoulements dans les fosses nasales de trois patients différents. Pour cela, il place sur chacun des patients un débitmètre en entrée des narines, qui mesure le débit d'air Φ, et un capteur de pression dans la gorge qui mesure la différence de pression entre l'entrée et la sortie des fosses ΔP. Il demande ensuite au patient d'inspirer et relève la valeur de ΔP (en Pascals, Pa) pour différentes valeurs du débit Φ (en litres par minute, l/min), espacées régulièrement. Il remplit ainsi les trois tableaux ci-dessous :

Φ	0	1	2	3	4	5	6	7
ΔP	-15	24	59	99	105	129	161	179

Table 1 – Relevé expérimental. Patient 1.

Φ	0	2	4	6	8	10	12	14
ΔP	13	2	17	29	56	94	152	197

Table 2 – Relevé expérimental. Patient 2.

Φ	0	1	2	3	4	5	6	7
ΔP	-367	390	181	-234	25	167	-3	154

Table 3 – Relevé expérimental. Patient 3.

Il décide ensuite de tracer les trois courbes des Fig. 1 et 2, où pour chaque patient, on reporte les valeurs de débit en abscisses, et de pression en ordonnées.

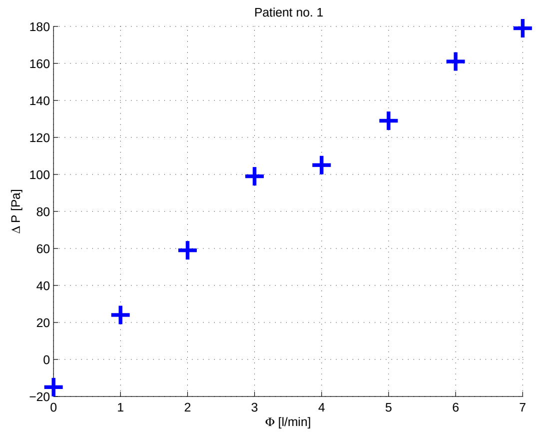

Figure 1 – Mesures d'écoulement effectuées par le Pr. Gluckenmuhl. Patient 1.

Le Pr. Gluckenmuhl veut déduire de ces courbes la loi de variation pression / débit et les paramètres associés à cette loi pour chaque patient. Il décide pour cela de faire de la régression linéaire.

1. Pour le Patient 1, il cherche β_0 et β_1 tels que :

$$\Delta P_i = \beta_1 \Phi_i + \beta_0 + \varepsilon_i.$$

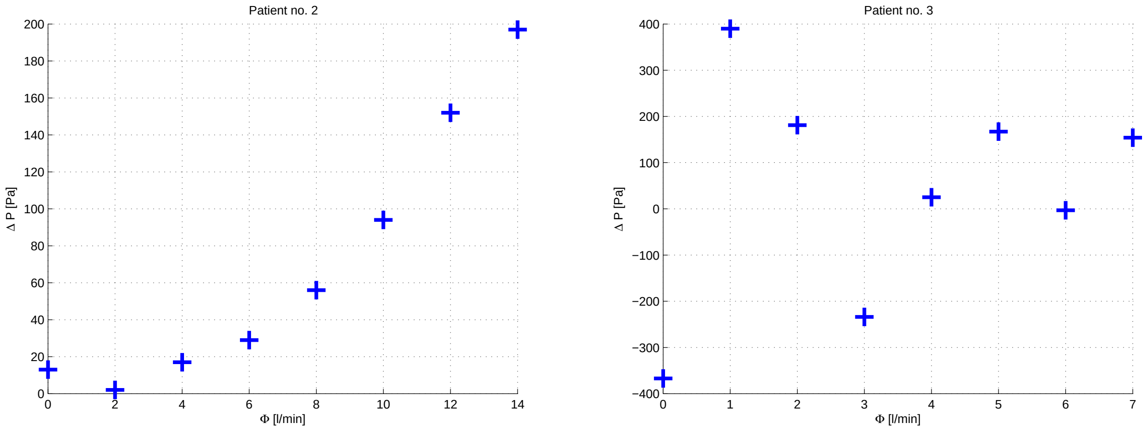

FIGURE 2 – Mesures d'écoulement effectuées par le Pr. Gluckenmuhl. Patient 2 (à gauche) et 3 (à droite).

Calculer les indicateurs statistiques $\bar{x}_n$, $\bar{y}_n$, s_x^2, s_y^2 et c_{xy}. Calculer les coefficients β_0 et β_1 en utilisant la méthode des moindres carrés, et tracer sur la Fig. 1 la droite associée. Déterminer la valeur du coefficient de corrélation r_{xy} et de l'erreur quadratique moyenne δ^2. Qu'en déduisez-vous sur la pertinence de la régression dans ce cas ?

2. Pour le Patient 2, il propose aussi de chercher β_0 et β_1 tels que :

$$\Delta P_i = \beta_1 \Phi_i + \beta_0 + \varepsilon_i.$$

Ce modèle de régression linéaire vous paraît-t-il approprié ? Justifiez. Que suggérez-vous à la place ? En suivant la même démarche qu'en 1., déterminer la valeur optimale des coefficients au sens des moindres carrés et tracer la courbe associée. Déterminer la valeur du coefficient de corrélation r_{xy} et de l'erreur quadratique moyenne δ^2 et comparer à ce qu'on aurait obtenu à l'aide du modèle $\Delta P_i = \beta_1 \Phi_i + \beta_0 + \varepsilon_i$.

3. Pour le Patient 3, le Pr. Gluckenmuhl utilise aussi le modèle :

$$\Delta P_i = \beta_1 \Phi_i + \beta_0 + \varepsilon_i.$$

Il détermine la droite aux moindres carrés et décide, dans un excès d'enthousiasme, d'envoyer ses résultats à l'Académie des Sciences. Calculer le coefficient de corrélation r_{xy} pour le Patient 3, et en déduire si, suite à ses travaux , le Pr. Gluckenmuhl recevra le Prix Nobel ou le Prix Ig-Nobel (www.ignobel.com).

Remarque d'ordre culturel : De telles mesures de relation pression-débit sont utilisées dans la pratique pour mieux comprendre certaines pathologies respiratoires, et étudier l'impact de dispositifs médicaux (respirateurs artificiels...). Si vous avez quelques souvenirs de mécanique des fluides, remarquez que la relation linéaire pour le Patient 1 peut être causée par un écoulement à faible vitesse régi par la loi de Poiseuille (le Patient 1 a certainement le nez bouché). Pour le Patient 2, on peut supposer un écoulement régi par la formule de Bernoulli (pourquoi ?).

Exercice 2.2 (⊛⊛)

Soient x_i des régresseurs strictement positifs. Un modèle de régression est dit linéaire s'il l'est en β_0, β_1. Montrer, via changement de variable, que les modèles suivants sont bien linéaires :

1. $Y_i = \beta_1 \ln x_i + \beta_0 + \varepsilon_i$.
2. $Y_i = \beta_2 x_i^2 + \beta_1 x_i + \beta_0 + \varepsilon_i$ (modèle de régression linéaire multiple).

3. $Y_i = \beta_0 x_i^{\beta_1} e^{\varepsilon_i}$ (modèle de Cobb-Douglas).
4. $Y_i = e^{\beta_1 x_i + \beta_0 + \varepsilon_i}(1 + e^{\beta_1 x_i + \beta_0 + \varepsilon_i})^{-1}$ (modèle logistique).

Exercice 2.3 (⊙⊙)

Montrer que la covariance empirique c_{xy} peut aussi se calculer comme suit :

$$c_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}_n \bar{y}_n.$$

Exercice 2.4 (⃠⊘)

On définit le coefficient de corrélation linéaire empirique r_{xy} entre un échantillon (x_i) et un échantillon (y_i) comme suit :

$$r_{xy} = \frac{c_{xy}}{s_x s_y}.$$

1. Montrer que : $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.
2. Montrer que $|r_{xy}| = 1$ si et seulement si tous les points (x_i, y_i) sont alignés sur une même droite.

Légende :

⊛⊛ : exercice intéressant.
⊝⊝ : exercice d'entraînement.
⊙⊙ : exercice fondamental.
⃠⊘ : exercice délicat.

3 Statistique inférentielle

3.1 Echantillonage et estimation ponctuelle

Exercice 3.1 (⊙⊙)

Soit $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$, notée $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$, lorsque :

$$\forall k \in \{0,1,2,\ldots,\}, \qquad P(X=k) = (1-p)^k p.$$

On considère X_1,...,X_n n variables aléatoires discrètes indépendantes suivant cette loi, de même paramètre $p \in]0,1[$ inconnu.

1. Calculer l'espérance de X_i.
2. Déterminer un estimateur de p par la méthode des moments.

Exercice 3.2 (⊙⊙)

Soit $\{X_n\}$ un échantillon dont la loi mère suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ la variable aléatoire qui compte les succès.

1. Quelle est la loi de probabilités de la variable S_n ? Rappeler quelles sont les espérance et variance associées ?
2. Montrer que pour n grand, S_n suit approximativement la loi normale, en précisant son espérance et sa variance.

   Comme on approche une loi discrète par une loi continue, il faut faire ce qu'on appelle une *correction de continuité*. Plus exactement on effectue l'approximation suivante :

   $$P(X=k) \simeq P(k - \frac{1}{2} \leq U \leq k + \frac{1}{2}),$$

   avec X qui suit une loi discrète d'espérance m et de variance σ^2, et où $U \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
3. On choisit maintenant $p = 0.3$. Calculer en utilisant les questions ci-dessus une valeur approchée de $P(S_{20} = 8)$. Comparer à la valeur exacte.
4. Même question pour $P(S_{20} \leq 8)$.

Exercice 3.3 (⊙⊙)

Le chiffre d'affaires hebdomadaire d'un magasin est en moyenne de 60 000 euros, avec une fluctuation (écart-type) de 8000 euros.

Le responsable a pour objectif un chiffre d'affaires *annuel* supérieur ou égal à 3 200 000 euros. Quelle est la probabilité pour que l'objectif soit atteint ?

Exercice 3.4 (⊛⊛)

Une entreprise fabrique des circuits électroniques en grande série. Le département qualité a réalisé une étude et a constaté que 3 % des circuits ne correspondaient pas aux normes en vigueur (circuits non valides). Un client de cette entreprise a reçu un lot de 500 circuits.

1. Quelle est la probabilité pour que le client reçoive moins de 1 % de circuits non valides dans son lot ?

   Par contrat, le client peut renvoyer le lot complet si celui-ci comporte plus de 5 % de circuits non valides.
2. Quelle est la probabilité que le client soit amené à renvoyer le lot ?

Exercice 3.5 (⊛⊛)

On considère X_1,...,X_N N variables aléatoires discrètes indépendantes suivant la même loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ inconnus.

1. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
2. Déterminer des estimateurs de n et p par la méthode des moments. Pour cela, il vous faudra résoudre un système (non linéaire) de deux équations à deux inconnues.

3.2 Intervalles de confiance

Exercice 3.6 (⊙⊙)

On a relevé la durée de vie de 125 composants électroniques et on a obtenu une moyenne de 99 (milliers d'heures) et un écart-type de 20.91. Donner une estimation par intervalle de confiance de la moyenne de la population, au seuil de risque de 5%.

Exercice 3.7 (⊙⊙)

Un sondage dans une commune révèle que sur les 500 personnes interrogées, 42% sont mécontentes de l'organisation des transports. Déterminer, au seuil de risque de 10% puis de 1%, un intervalle de confiance du pourcentage p de personnes mécontentes dans la commune.

Exercice 3.8 (⊛⊛)

L'intervalle de confiance d'une moyenne m, calculé à partir d'un échantillon de taille n au seuil de risque de 5% est $[111.8; 113.2]$.

1. Déterminer n sachant que l'écart-type de la population est égale à 6.24.
2. Quel est l'intervalle de confiance de cette moyenne au seuil de risque de 1%.

3.3 Tests d'hypothèses

Exercice 3.9 (⊙⊙)

Une entreprise commercialise deux produits A et B d'une même gamme : le produit A est plus cher et de meilleur qualité que le B.

Pour chaque produit, on peut mesurer sa qualité, qui est la réalisation d'une variable aléatoire X :

— X suit une loi normale d'espérance $\mu_1 = 5$ et de variance 1 si le produit est A.
— X suit une loi normale d'espérance $\mu_2 = 4$ et de variance 1 si le produit est B.

Un client achète 10 produits et veut s'assurer qu'ils sont tous du type A. Comme il vaut mieux ne pas accuser à tort le constructeur, il prend comme hypothèse nulle $H_0 : \mu = 5$ (les produits sont du type A), qu'on rejettera en prenant un risque faible. L'hypothèse alternative est alors $H_1 : \mu = 4$.

On choisit comme statistique de test la moyenne du lot : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Sous l'hypothèse H_0, quelle est la loi de $\bar{X}$?
2. *Test 1.* On peut commencer à chercher un intervalle d'acceptation de la forme $A = [5-\delta; 5+\delta]$ tel que le risque α soit de 0.05. Trouver alors la valeur de δ.
3. Calculer pour ce test le risque de deuxième espèce β et la puissance du test $1-\beta$.
4. *Test 2.* On va maintenant construire un deuxième test, où l'intervalle d'acceptation est de la forme $A = [5-\delta'; +\infty[$. Trouver δ' pour que le risque α soit encore de 0.05.
5. Calculer alors pour le Test 2 le nouveau risque de deuxième espèce β' et la puissance du test $1-\beta'$. Comparer au premier test.

Légende :

⊛⊛ : exercice intéressant.
⊖⊖ : exercice d'entraînement.
⊙⊙ : exercice fondamental.
⊘⊘ : exercice délicat.