Chapitre 1
Notions élémentaires sur les ensembles et les applications

Jean-Jil Duchamps*

ISIFC 2ème année, Statistiques pour l'ingénieur, 2020-2021

Ces notes se basent sur celles de Lucie Delcey, enseignante à l'ISIFC en 2019–20.

1 Les ensembles

1.1 Définitions et exemples

Définition 1 (Ensemble, élément)**.** Un **ensemble** est une collection d'objets que l'on appellera les **éléments** de l'ensemble.

- On notera généralement un ensemble à l'aide d'une lettre majuscule : E, F, etc.
- Les éléments de l'ensemble seront notés en minuscules : x, y, a, b, etc.
- On utilise les accolades pour énumérer les éléments qui appartiennent à l'ensemble. Par exemple, $E = \{a, b, c, d\}$.

Voyons quelques exemples, utiles en probabilités :

Exemples 2.

1. Soit un jeu de 32 cartes, on pourra noter J l'ensemble de toutes les cartes :

$$J = \{\text{as de pique, as de cœur, as de trèfle, as de carreau, roi de pique}, \dots\}$$

   Il y a 32 éléments en fait, on ne les énumère pas tous.
2. Soit un dé qu'on lance, on peut noter E l'ensemble des chiffres pouvant apparaître sur la face supérieure :

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

En mathématiques, on manipule des ensembles de nombres que vous connaissez bien :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ l'ensemble des entiers naturels,}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \text{ l'ensemble des entiers relatifs,}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, \dots\right\} \text{ l'ensemble des rationnels,}$$

*Laboratoire de mathématiques de Besançon, jean-jil.duchamps@univ-fcomte.fr.

$$\mathbb{R} = \left\{0, 1, \frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, \frac{\pi}{3}, e^4, \dots\right\} \text{ l'ensemble des réels,}$$
$$\mathbb{C} = \{0, 1, 2, i, 1+i, e^{i\pi/4}, \dots\} \text{ l'ensemble des complexes,}$$

Définition 3 (Appartenance)**.** On dit que l'élément x **appartient** à l'ensemble E, et on note $\underline{x \in E}$ lorsque x est effectivement présent dans E, et si x n'appartient pas à E, on note $\underline{x \notin E}$.

Exemple 4. Reprenons l'exemple du jeu de carte. (roi de pique) $\in J$, (deux de carreau) $\notin J$ (le jeu est un jeu de 32 cartes).

Il existe un ensemble qui ne comporte aucun élément, il s'agit de l'**ensemble vide**, on le note $\varnothing$.

1.2 Cardinal d'un ensemble, ensembles discrets et continus

Définition 5 (Cardinal)**.** On appelle le **cardinal** d'un ensemble E le nombre d'éléments de cet ensemble et on le note $\text{Card}(E)$, $|E|$ ou $\#E$.

Exemples 6.

1. Reprenons l'exemple de J, l'ensemble associé au jeu de 32 cartes, on a bien sûr $\text{Card}(J) = 32$.
2. Reprenons l'exemple du dé à 6 faces, pour $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on a $\text{Card}(E) = 6$.

Tous les ensembles ne possèdent pas un nombre fini d'éléments. Prenons tout simplement l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$: il en existe une infinité. Il ne faut pas s'embarrasser pour si peu : on parlera alors de **cardinal infini** et on le notera "∞". Ainsi :

$$\text{Card}(\mathbb{N}) = \infty.$$

Sinon, nous parlerons tout simplement de **cardinal fini**.

Parmi tous les ensembles de cardinal infini, il y a une distinction **fondamentale** à opérer.

$\rightsquigarrow$ il y a les ensembles qui "ressemblent" plus ou moins à $\mathbb{N}$ (entiers naturels)

$\rightsquigarrow$ et il y a ceux qui "ressemblent" plus ou moins à $\mathbb{R}$ (réels)

On va formaliser un peu ceci :

Définition 7. On dira qu'un ensemble est **dénombrable** s'il peut être mis en correspondance avec l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Autrement dit, E est dénombrable si chaque élément de E peut être mis en correspondance (ou associé) à un élément de $\mathbb{N}$ et un seul.

Remarque 8. Par dénombrable, on sous-entend ici **infini dénombrable**.

Exemple 9 (Fondamental)**.** L'ensemble des entiers pairs, noté $2\mathbb{N}$, est **infini dénombrable**. En effet,

$$\begin{tikzcd}
2\mathbb{N} & 0 \arrow[d, "\text{on divise par 2}"'] & 2 & 4 & 6 & \dots \\
\mathbb{N} & 0 & 1 \arrow[u, "\text{on multiplie par 2}"'] & 2 & 3 & \dots
\end{tikzcd}$$

À chaque entier pair, on peut associer un unique entier naturel en le divisant par 2, ce que l'on peut noter comme ceci :

$$2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

(c'est ensemble se lit "ensemble de tous les nombres sous la forme $2n$ avec $n \in \mathbb{N}$").

Exercice 10.

1. Montrer que l'ensemble des entiers impairs est dénombrable ;
2. Montrer que l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est dénombrable ;
3. Montrer que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable (plus difficile).

En revanche, on peut montrer que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ **n'est pas dénombrable**. La démonstration est hors programme. Ce qu'il faut en retenir, c'est qu'en un certain sens, il existe beaucoup plus de réels que d'entiers. C'est aussi le cas de beaucoup d'autres ensembles qui se construisent à partir de $\mathbb{R}$ (comme l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par exemple, ou l'intervalle $[0, 1]$ des réels compris entre 0 et 1).

Il est important de distinguer les **ensembles discrets** (soit finis, soit infinis dénombrables) et les **ensembles continus** (infinis non-dénombrables).

Exemples 11.

- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$ sont des ensembles discrets ;
- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des ensembles continus ;
- si l'on souhaite considérer l'ensemble des temps d'attente d'un bus ou d'un ascenseur, on va les représenter par des réels positifs (ensemble que l'on note $\mathbb{R}_+$) : l'ensemble $\mathbb{R}_+$ est un ensemble continu.

1.3 La relation d'inclusion

Définition 12 (Inclusion)**.** Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$ si tout élément de E est aussi dans F. Autrement dit,

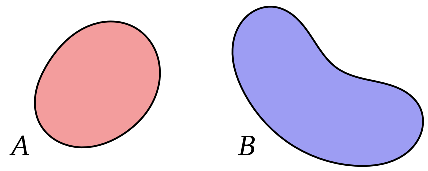
$$E \subset F \iff (\forall x \in E, x \in F).$$

Si E n'est pas inclus dans F, on notera $E \not\subset F$.

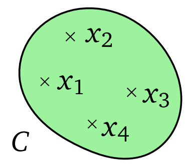
Exemples 13.

- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alors $E \subset \mathbb{N}$;
- $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
- $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$;
- $\{1, 2\} \not\subset \{3\}$.

Représentation graphique des ensembles et de l'inclusion : Pour illustrer les opérations sur les ensembles introduites dans la suite du cours, on représentera les ensembles à l'aide de "patates", qui sont des surfaces fermées du plan, de forme plus ou moins déterminée, comme ceci :

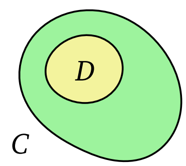


Si l'ensemble est discret, ses éléments sont "isolés" les uns des autres, et on représente ceux-ci à l'aide de croix :



Si l'ensemble est continu, on ne peut plus utiliser un tel procédé. On ne cherche plus alors à représenter les éléments de l'ensemble.

Grâce à cette technique de représentation, on peut facilement visualiser la notion d'inclusion (ici on représente $D \subset C$) :



Définition 14 (Égalité)**.** On dit que E et F sont identiques, ou égaux, si $E \subset F$ et $F \subset E$. On notera $E = F$. Autrement dit, ils contiennent exactement les mêmes éléments.

Proposition 15. *L'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles : pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$.*

Proposition 16. *La relation d'inclusion est **transitive** : soient trois ensembles A, B et C tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.*

Proposition 17. *La relation d'inclusion est **réflexive** : pour tout ensemble A, alors $A \subset A$.*

Définition 18 (Sous-ensemble)**.** On appelle un **sous-ensemble** d'un ensemble E tout ensemble inclus dans E.

Exemples 19.

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ donc l'ensemble des entiers naturels est un sous-ensemble de celui des entiers relatifs.
- Soit $E = \{1, 2\}$. Alors, $\{1\}$ et $\{2\}$ sont des sous-ensembles de E.

Il est important de ne pas confondre, pour $x \in E$:

$$x \quad \neq \quad \{x\}$$

À gauche, x désigne un **élément** de E, tandis qu'à droite, $\{x\}$ est un **sous-ensemble** de E (de cardinal 1, dit "**singleton**").

Définition 20. On appelle **ensemble des parties** de E, et on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

Exercice 21. Énumérer tous les sous-ensembles associés aux ensembles suivants :

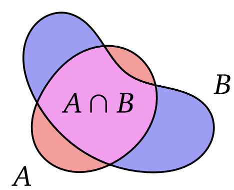
1. $E = \{1, 2\}$;
2. $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

1.4 Opérations élémentaires sur les ensembles

Définition 22 (Intersection)**.** Soient E et F deux ensembles. On appelle **intersection** de E et de F, et on note $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E et à F :

$$E \cap F = \{x \mid x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Représentation :



On généralise sans difficulté la définition pour une famille finie d'ensembles : $E_1, E_2, \ldots, E_n$. L'ensemble $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$ est l'ensemble de tous les éléments communs à tous les $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Définition 23. On dira que deux ensembles sont **disjoints** si leur intersection est l'ensemble vide :

$$E \text{ et } F \text{ disjoints} \iff E \cap F = \varnothing.$$

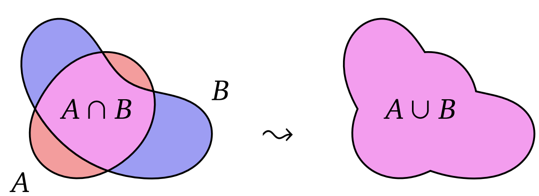
Exercice 24. Donner l'intersection des ensembles suivants :

1. $E = \{1, 2, 4, 5\}$ et $F = \{3, 4, 5, 7\}$;
2. $E = [1, 4]$ et $F = [3, 5]$ (ce sont des segments de $\mathbb{R}$).

Définition 25 (Réunion)**.** Soient E et F deux ensembles. On appelle la **réunion** de E et F et on note $E \cup F$ l'ensemble de tous les éléments de E et de F :

$$E \cup F = \{x \mid x \in E \text{ ou } x \in F\}$$

Représentation :



On généralise de même sans aucune difficulté cette définition à une famille finie d'ensembles : $E_1, \dots, E_n$. L'ensemble $E_1 \cup \cdots \cup E_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent ou à E_1, ou à E_2, etc., ou à E_n.

Exercice 26. Reprendre l'exercice précédent et calculer la réunion pour chacun des deux cas 1 et 2.

Exercice 27. Soient E et F deux ensembles. Montrer que :

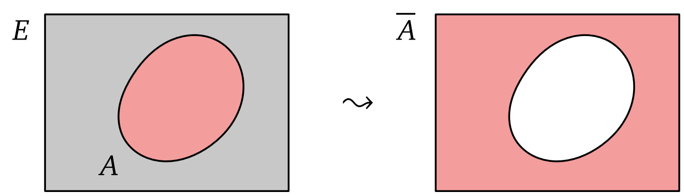
1. $(E \cap F) \subset E \subset (E \cup F)$;
2. $(E \cap F) \subset F \subset (E \cup F)$;

Définition 28 (Complémentaire)**.** Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A, autrement dit :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

(se lit "complémentaire de A"). On note le complémentaire de A dans E de plusieurs façon : ${}^cA$, $\overline{A}$ ou $E \setminus A$.

Représentation :



Exercice 29. Déterminer le complémentaire des ensembles suivants :

1. complémentaire de $\{1\}$ dans $\{1, 2, 3\}$;
2. complémentaire de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 2, 3\}$;
3. complémentaire de $2\mathbb{N}$ (nombres pairs) dans $\mathbb{N}$;
4. complémentaire de $[0; 1] \cup [10; 11]$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 30. Quel est le complémentaire de E dans E, E étant un ensemble quelconque ? Et le complémentaire de $\varnothing$ dans E ? Justifiez.

Exercice 31. Montrer que $\overline{\overline{A}} = A$.

1.5 Quelques propriétés de l'union, l'intersection et du complémentaire

On vérifiera sans peine la proposition suivante :

Proposition 32.

1. *$\cap$ et $\cup$ sont **commutatives** : pour tout E et pour tout F ensembles,*

$$E \cap F = F \cap E \text{ et } E \cup F = F \cup E.$$

2. *$\cap$ et $\cup$ sont **associatives** : pour E, F et G ensembles, on a :*

$$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G = E \cap F \cap G,$$
$$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G = E \cup F \cup G.$$

Ces propriétés sont de bon goût mais on a même encore mieux :

Proposition 33.

1. *L'intersection est distributive par rapport à la réunion : pour E, F et G, ensembles, on a*

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G).$$

2. *La réunion est distributive par rapport à l'intersection : pour E, F et G, ensembles, on a :*

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G).$$

Exercice 34. Illustrer cette propriété graphiquement.

Le complémentaire vérifie de plus la proposition suivante :

Proposition 35. *Le complémentaire de la réunion est l'intersection des complémentaires, et le complémentaire de l'intersection est la réunion des complémentaires. Autrement dit, soit E un ensemble et soient A, B deux sous-ensembles de E. On a :*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 36. Illustrer cette propriété graphiquement.

1.6 Produit cartésien d'ensembles

Nous allons encore voir une dernière notion sur les ensembles, très utile :

Définition 37. Soient x et y deux éléments, on appelle **couple** (x, y) la suite formée par les deux éléments : le premier est x et le deuxième est y.

- On a l'ordre qui est important :
$$(x, y) \neq (y, x),$$
on veillera donc à ne pas confondre le couple (x, y) avec l'ensemble $\{x, y\}$ (dans la notion d'ensemble, peu importe l'ordre $\{x, y\} = \{y, x\}$).

Définition 38 (Produit cartésien)**.** Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** des ensembles E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples dont le premier élément appartient à E et le deuxième à F. Autrement dit,

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E,\ y \in F\}.$$

Exemple 39. Soient $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. Alors, $E \times F = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

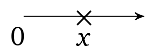
Exercice 40. Écrire $F \times E$. Que remarque-t-on ?

Généralisation à plus de deux ensembles :

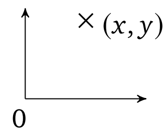
Définition 41. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles quelconques. Alors, le **produit cartésien** $E_1 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble des suites de n éléments (ou n-**uplets**) $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$, pour $i = 1, \ldots, n$).

Exemples 42. C'est avec cette notion que l'on définit l'ensemble des points du plan et de l'espace.

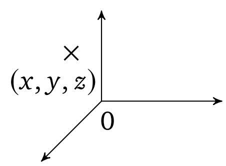
1. Droite $\longrightarrow \mathbb{R}$



2. Plan $\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$



3. Espace $\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$



2 Les applications

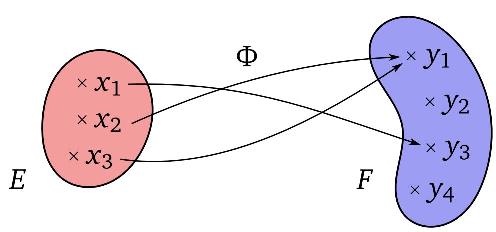
2.1 Définition et quelques exemples

Nous allons commencer avec une définition très générale :

Définition 43 (Application)**.** Soient E et F deux ensembles quelconques. On appelle **application** (ou **fonction**) de E dans F toute "opération" qui a un élément de E fait correspondre **un et un seul élément de** F. On utilise la notation suivante pour les application :

$$\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & y = \Phi(x). \end{cases}$$

Illustration :



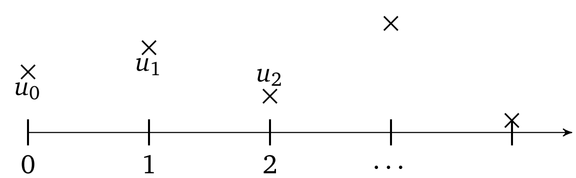
À chaque élément $x \in E$, Φ associe un seul élément de F : $y = \Phi(x)$. L'élément $\Phi(x)$ est appelé l'**image** de x par Φ, E est l'**ensemble de définition** de la fonction Φ.

Exemples 44. Vous connaissez très bien deux cas particuliers d'applications :

1. **Les suites.**
   Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n. \end{array} \right.$$

   On a $u(0) = u_0$, $u(1) = u_1$, etc. Par exemple, $u_n = 3n + 1$, alors $u : 0 \mapsto 1$, $u : 1 \mapsto 4$, $u : 2 \mapsto 7$, etc. Représentation graphique d'une suite :

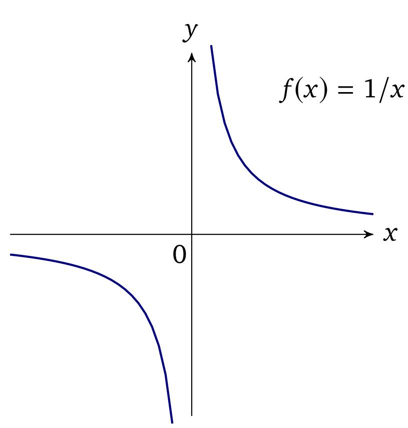


2. **Les fonctions réelles d'une variable réelle.**
   Les fonctions élémentaires "classiques" sont des applications de $E \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. E est le domaine de définition de la fonction.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array} \right.$$

   Par exemple,

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array} \right.$$



2.2 Deux exemples fondamentaux : la fonction indicatrice et la mesure de Dirac

Premier exemple : la fonction indicatrice

Définition 45 (Fonction Indicatrice)**.** Soit E un ensemble. La fonction indicatrice d'un sous-ensemble A de l'ensemble En notée $\mathbb{1}_A$, est la fonction définie sur E qui vaut 1 sur A et 0 à l'extérieur de A :

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \in E \setminus A. \end{cases}$$

Exemples 46.

1. La fonction de Heaviside (du nom de Oliver Heaviside) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme l'indicatrice de $\mathbb{R}_+$:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$
2. On rencontre la fonction indicatrice dans la définition de fonctions complexes : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
peut s'écrire en une seule ligne : $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+\setminus\{0\}}(x)$.

Remarque 47. Parfois, on écrire $\mathbb{1}_{\{x\in A\}}$ au lieu de $\mathbb{1}_A(x)$. Pour l'exemple 2, cela donne $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}$.

Voici quelques propriétés vérifiées par la fonction indicatrice (les preuves de ces propriétés peuvent être effectuées en exercice) :

Proposition 48. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E tels que $A \subset B$. Alors, pour tout $x \in E$, on a $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.*

On en déduit que la fonction indicatrice d'un ensemble caractérise cet ensemble au sens où

$$A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$$

(c'est pourquoi, la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ s'appelle aussi **fonction caractéristique** de l'ensemble A).

Les opérations sur les ensembles, passage au complémentaire, réunion, intersection, produit cartésien de deux ensembles se transforment en opérations sur les fonctions indicatrices de la façon suivante :

Proposition 49. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.*

On a alors les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$;
2. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$,
3. *Si A et B sont disjoints, alors* $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$;
4. *De manière générale,* $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$;
5. $\mathbb{1}_{A\times B}(x,y) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)$ *pour tout* $(x,y) \in E \times E$.

Deuxième exemple : la mesure de Dirac

Définition 50 (Mesure de Dirac)**.** Soit E un ensemble. La **mesure de Dirac** en $a \in E$, que l'on note δ_a, est définie par :

$$\delta_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \delta_a(A), \end{array} \right.$$

où

$$\forall A \subset E,\ \delta_a(A) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & a \notin A \\ 1 & \text{si} & a \in A. \end{array} \right.$$

Remarque 51. Soit $a \in E$ et soit δ_a définie sur $\mathcal{P}(E)$. Alors, $\delta_a(E) = 1$.

Exemple 52. Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et soit $A = \{1, 2\}$ un sous-ensemble de E. Alors $\delta_1(A) = 1$, $\delta_2(A) = 1$ et $\delta_3(A) = 0$.

On remarque que la mesure de Dirac nous fait penser à la fonction indicatrice. En effet, il existe un lien entre les deux qui est donné dans la proposition ci-dessous :

Proposition 53. *Soit E un ensemble. On considère A un sous-ensemble de E et a un élément de E. Alors,*

$$\mathbb{1}_A(a) = \delta_a(A).$$

Remarque 54. Attention ici à ne pas confondre la fonction indicatrice et la mesure de Dirac. La fonction indicatrice est **définie sur** E tandis que la mesure de Dirac est **définie sur** $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E.