4 Population à l'équilibre

4.1 Exercices

Exercice 19 : On considère le modèle de Wright–Fisher à n individus. On suppose la coexistence de deux allèles, notés A et a dans la population. À l'instant initial, on a N_0 individus porteurs de l'allèle A. On notera $(N_t)_{t\in\mathbb{N}}$ le nombre d'individus porteurs de cet allèle au cours du temps, et $X_t = N_t/n$ leur proportion dans la population.

a) Quelle est la loi de N_{t+1} conditionnellement à $N_0, N_1, \dots, N_t$?

b) On rappelle qu'un processus aléatoire $(M_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une *martingale* si les variables sont toutes intégrables et que

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \mid M_0, \dots, M_t] = M_t.$$

Montrer que $(N_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

c) On admet que l'on a la convergence presque sûre $N_t \to N_\infty$, avec N_∞ une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, n\}$. Donner une interprétation des événements

$$\{N_\infty = 0\} \text{ et } \{N_\infty = n\}.$$

On appelle l'événement $\{N_\infty = n\}$ *la fixation de l'allèle* A.

d) Que vaut $\mathbb{E}[N_\infty]$? En déduire la valeur de la *probabilité de fixation* $\mathbb{P}(N_\infty = n)$.

Exercice 20 : On considère le modèle de Moran. Comme à l'exercice précédent, on suppose que les individus portent soit l'allèle A, soit l'allèle a. On appelle $(N_t)_{t\geqslant 0}$ la proportion d'individus de type A au temps t.

a) Montrer que N_t est une chaîne de Markov à temps continu, de taux de transitions

$$q_{k,k+1} = q_{k,k-1} = k(n-k).$$

b) Une chaîne de Markov à temps continu $(M_t)_{t\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une *martingale* si pour tout $t \geqslant 0$, M_t est intégrable, et si pour tout état i,

$$\sum_{j\neq i} (j-i) q^M_{ij} = 0,$$

où $(q^M_{ij})_{ij}$ est la matrice de transition de M. Si M est bornée, alors M converge presque sûrement vers une variable aléatoire M_∞ d'espérance égale à M_0. Que dire de $(N_t)_{t\geqslant 0}$? En déduire la probabilité de fixation $\mathbb{P}(N_\infty = n)$.

c) On ajoute de la sélection au modèle : les individus de type A sont avantagés et se reproduisent à un taux $1 + s > 1$. Que deviennent les taux de transitions de N_t ?

d) Montrer que le processus M défini par $M_t := (1+s)^{-N_t}$ est une martingale.

e) En déduire la probabilité de fixation dans le modèle avec sélection.

Exercice 21 : Hauteur de l'arbre de Kingman.

a) Soit K_n un arbre de Kingman à n feuilles. Montrer que l'espérance de la hauteur de K_n (c'est à dire la plus grande distance d'une feuille à la racine) est

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k-1)} = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

b) Comparer avec la hauteur moyenne d'un arbre de Yule arrêté à n individus.

4.2 Programmation

Exercice 22 : Écrire une fonction `WF(n)` qui génère une généalogie selon le modèle de Wright–Fisher.

Exercice 23 : Écrire une fonction `kingman(n)` qui génère une généalogie selon le modèle de Moran, c'est-à-dire un arbre de Kingman.