2 Population en expansion

Notations :

- $\mathrm{Geo}_0(p)$: la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que si $X \sim \mathrm{Geo}_0(p)$, on a $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^n p$ pour tout $n \geqslant 0$.
- $\mathrm{Geo}_1(p)$: la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que si $X \sim \mathrm{Geo}_1(p)$, on a $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1} p$ pour tout $n \geqslant 1$ (et bien sûr $\mathbb{P}(X = 0) = 0$).
- $\mathrm{Geo}(p,q)$: la loi de la variable XY, où $X \sim \mathrm{Be}(q)$ et $Y \sim \mathrm{Geo}_1(p)$, indépendante de X. On peut vérifier que $\mathbb{P}(XY = n) = (1-p)^{n-1} pq$ pour tout $n \geqslant 1$, et $\mathbb{P}(XY = 0) = 1-q$.

2.1 Exercices

Exercice 8 : On considère un arbre de Galton–Watson $T \sim \mathrm{GW}(\xi)$, avec $\xi \sim \mathrm{Geo}_0(p)$, pour un $p \in \,]0,1[$ fixé.

a) Calculer la fonction génératrice de ξ.

b) En déduire la probabilité d'extinction p_{ext} de T en fonction de p.

c) Soit $\mathbf{t}$ un arbre planaire fixé, à n sommets. Montrer que $\mathbb{P}(T = \mathbf{t})$ ne dépend que de n (et de p, mais pas de la forme de $\mathbf{t}$).

*d) On choisit p tel que $p_{\text{ext}} < 1$. Montrer que la loi de T conditionnellement à son extinction est $\mathrm{GW}(\mathrm{Geo}_0(1-p))$.

*e) Déduire du calcul de $\mathbb{P}(T = \mathbf{t})$ que pour $x \in [0, 1/4]$, on a

$$\sum_{n \geqslant 1} b_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2},$$

où b_n est le nombre d'arbres planaires à n sommets.

N.B : C'est une manière de parvenir à calculer les b_n explicitement.

Exercice 9 : On considère un arbre de Galton–Watson $T \sim \mathrm{GW}(\xi)$, avec $\mathbb{P}(\xi = 2) = 1 - \mathbb{P}(\xi = 0) = 1-p$, pour un $p \in \,]0,1[$ fixé.

a) Calculer la fonction génératrice de ξ.

b) En déduire la probabilité d'extinction p_{ext} de T en fonction de p et comparer à l'exercice précédent. Que remarque-t-on ?

c) Soit $\mathbf{t}$ un arbre planaire *binaire* fixé, à n *feuilles*. Montrer que $\mathbb{P}(T = \mathbf{t})$ ne dépend que de n (et de p, mais pas de la forme de $\mathbf{t}$).

d) Expliquer les deux résultats ci-dessus au regard des exercices précédents.

Exercice 10 : Considérons le processus de Yule $(N_t)_{t\geqslant 0}$ de taux de naissance λ, qui compte le nombre d'individus vivant au temps t dans l'arbre de Yule. On admet / rappelle une conséquence de la propriété de branchement

$$\mathbb{E}[f(N_t)] = f(1)e^{-\lambda t} + \int_0^t \mathbb{E}[f(N_{t-s} + N'_{t-s})]\lambda e^{-\lambda s}\, ds, \tag{1}$$

pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bornée ou positive.

a) Soit $z \in [0,1]$. On pose $f(n) = z^n$ et $g(t) = \mathbb{E}[z^{N_t}]$. Montrer que g satisfait l'équation différentielle suivante :
$$g'(t) = -\lambda(g(t) - g(t)^2).$$

b) Montrer que les solutions de cette équation sont de la forme $t \mapsto e^{-\lambda t}(c + e^{-\lambda t})^{-1}$, pour une constante c.

c) En déduire l'expression de $\mathbb{E}[z^{N_t}]$, pour tout $t \geqslant 0$.

d) En déduire que $N_t \sim \mathrm{Geo}_1(e^{-\lambda t})$.

Exercice 11 : Soit A_t l'âge au temps t d'un point de branchement uniformément choisi parmi ceux d'un arbre de Yule Y_t arrêté au temps t.

a) En utilisant la construction *coalescent point process* (CPP) de Y_t, donner la loi de A_t.

b) En déduire la convergence en loi $A_t \longrightarrow \mathrm{Exp}(\lambda)$.

* c) Quelle est la loi limite du nombre de descendant d'un sommet uniformément choisi ?

Exercice 12 : On note T_n un arbre de Yule arrêté à n individus. Soit N_n le nombre de feuilles de T_n descendant du premier enfant de la racine.

a) Donner l'ensemble de valeurs de N_n. Quelle symétrie possède la loi de N_n ?

b) En utilisant la construction CPP de T_n, donner la loi de N_n.

* **Exercice 13 :** On considère maintenant le processus de naissance-mort de taux λ (naissance) et μ (mort). L'équivalent de la propriété (1) est :

$$\mathbb{E}[f(N_t)] = f(1)e^{-(\lambda+\mu)t} + \int_0^t \big(\lambda\mathbb{E}[f(N_{t-s} + N'_{t-s})] + \mu f(0)\big)e^{-(\lambda+\mu)s}\, ds,$$

a) Soit $z \in [0,1]$. Montrer que $g(t) := \mathbb{E}[z^{N_t}]$ satisfait l'équation différentielle
$$g'(t) = (\lambda g(t) - \mu)(g(t) - 1).$$

b) En posant $h(t) = 1/(1-g(t))$, résoudre l'équation différentielle pour h et calculer $\mathbb{E}[z^{N_t}]$.

c) Soit $X \sim \mathrm{Geo}(p,q)$. Montrer que
$$\mathbb{E}[z^X] = 1 - \frac{q(1-z)}{p + (1-p)(1-z)}.$$

d) En déduire la loi de N_t.

2.2 Programmation

Exercice 14 :

a) Écrire une fonction `galton_watson(xi, N=10)` qui renvoie un arbre de Galton–Watson de loi de reproduction ξ. L'argument `xi` représente cette loi : c'est une fonction python qui renvoie un nombre aléatoire. L'argument optionnel `N` est une limite du nombre de générations à ne pas dépasser (si l'arbre est infini, on doit se fixer une limite).

b) Écrire une fonction `generation(tree, k)` qui compte le nombre d'individus à la génération k de l'arbre `tree`.

c) Choisir une loi `xi` de moyenne $m \in [1/2, 2]$, et tracer, au moyen de simulations, le nombre d'individus moyen par génération. Comparer avec les valeurs théoriques.

Exercice 15 :

a) Écrire une fonction `birth_death(t, b=1, d=0, N=5)` qui renvoie un arbre de naissance-mort arrêté au temps `t`, avec un taux de naissance `b`, un taux de mort `d`, et avec une limite de `N` dans le nombre de générations.

   Les valeurs des nœuds seront les temps des événements correspondants.

b) Sur un grand échantillon d'arbres de Yule, inférer la loi du nombre N_t d'individus au temps $t = \log 2$. Comparer avec la loi théorique.